HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 44

## Die Vorzüge der Gaußfunktion gegenüber anderen selbstreziproken Funktionen

Dipl.-Ing. BERTULEIT

H 44

1 9 6 0

Technischer Bericht Nr. 44

# Die Vorzüge der Gaußfunktion gegenüber anderen selbstreziproken Funktionen


## Zusammenfassung

Für Untersuchungen mit Impulsen und gleichzeitiger Frequenzbandbeschränkung benutzt man impulsartig modulierte Töne. Unter diesen interessieren besonders die sogenannten selbstreziproken Funktionen als Hüllkurven, da sie die gleiche Form und somit Beschränkung in Zeit- und Spektralbereich aufweisen.

Diese Funktionen werden aus der Literatur zusammengestellt. Ferner wird gezeigt, daß unter ihnen die Gaußfunktion ($e^{-\pi x^2}$) sich dadurch auszeichnet, daß sie die größte Halbwertsbreite und außerhalb dieser den steilsten Abfall aufweist. Sie ist daher für den obigen Zweck am besten geeignet.



Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. H. Bertuleit

(Dipl.-Ing. H. BERTULEIT)

Der Abteilungsleiter

gez. L. Cremer

(Prof.Dr.-Ing. L. CREMER)

Der Institutsdirektor

gez. L. Cremer

(Prof.Dr.-Ing. L. CREMER)


Berlin-Charlottenburg, den 29. Dezember 1960


Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik GmbH
Bibliothek
Nr.
2476

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann man bekanntlich den Verlauf einer Funktion von der Zeit- in die Frequenzebene überführen und umgekehrt.

Es sei die Zeitfunktion F(t) vorgegeben. Die Funktion

$$\mathcal{G}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

heißt die Fouriertransformierte der Funktion F(t) und ist die Spektralfunktion des Zeitvorganges. Durch die Umkehrtransformation

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

erhält man aus dem Verlauf der Spektralfunktion die Zeitfunktion.

Zeitverlauf $\rightleftarrows$ Spektralfunktion

(Originalfunktion) (Bildfunktion)

In den folgenden Ausführungen sollen nun solche Funktionen herausgestellt werden, die ihre funktionellen Eigenschaften bei einer Fouriertransformation nicht ändern, d.h. die Funktion im Originalbereich soll den gleichen Verlauf haben, wie im Bildbereich.

Diese Art von Funktionen werden als selbstreziproke Funktionen ("Self-reciprocal functions") bezeichnet.

Aus den Tafeln von C a m p b e l l und F o s t e r "Fourier Integrals for Practical Applications" (1) werden die dort gefundenen selbstreziproken Funktionen herausgeschrieben und kurz erläutert. Besondere Aufmerksamkeit wird solchen Funktionen geschenkt, die durch einen einzigen Impuls darstellbar sind.

Unter der Veränderlichen soll stets eine bezogene Größe verstanden sein, also z.B.

$$f \cong \frac{f}{\Delta f}$$

Die in Klammern angegebenen Nummern zu den einzelnen Funktionen beziehen sich auf die Nummerierung in den Tafeln von

C a m p b e l l und F o s t e r (1).

---

Die Funktion

$$\frac{K_{1/4}(2\pi p(f^2+p^2)^{1/2})}{(f^2+p^2)^{1/8}} \tag{916}$$

beschreibt eine Vielzahl von selbstreziproken Funktionen, die durch einen Impuls darstellbar sind. Hierbei ist p ein Parameter, der Werte zwischen 0 und $\infty$ annehmen kann.

Hinsichtlich der Funktion K gilt allgemein (siehe (1),(2))

$K_\gamma(z)$ = Besselfunktion zweiter Art für imaginäres Argument. Dies sind sogenannte modifizierte Zylinderfunktionen, die durch eine Drehung des Koordinatensystems um $90^\circ$ entstehen. Drückt man diese Funktion durch eine Besselfunktion erster Art aus, so gilt für nichtganzzahliges $\gamma$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right]$$

$I_\nu(z)$ = modifizierte Besselfunktion erster Art mit der Reihendarstellung

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

und $\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{+x} e^{\xi-1}\,dx$ Gammafunktion.

Die Beziehung zwischen der Besselfunktion $J_\nu(z)$ und der modifizierten Besselfunktion $I_\nu(z)$, bei der durch eine Drehung des Koordinatensystems die reelle Achse in eine bestimmte Nullpunktsgeraden überführt wird, lautet bei einer Drehung um $90^\circ$:

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\frac{\pi}{2}j} \cdot J_\nu(z e^{\frac{\pi}{2}j}) = e^{-\nu\frac{\pi}{2}j} \cdot J_\nu(jz)$$

mit

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}.$$

Die Funktion (916) kann für zwei Werte des Parameters p durch elementare Funktionen beschrieben werden. Es ergibt sich für

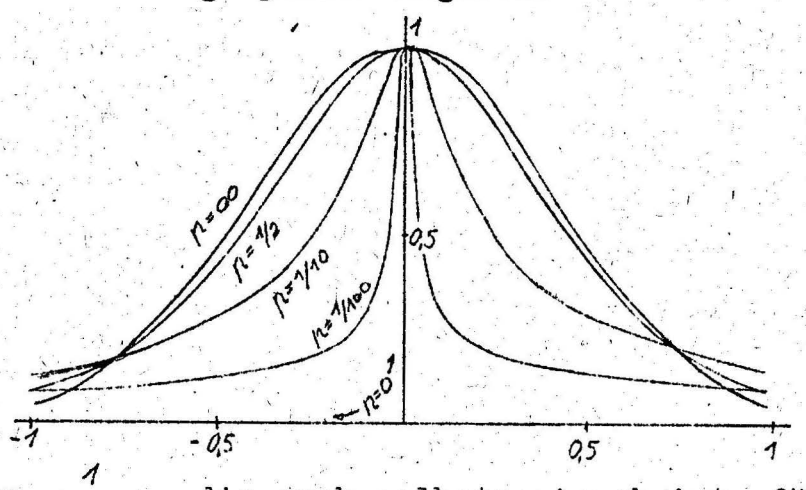
$$p = 0 : \quad \frac{1}{|f|^{\frac{1}{2}}}$$

$$p = \infty : \quad e^{-\pi f^2} \qquad \text{(Gaußfunktion)}$$

Dividiert man die Funktion (916) durch den Wert, den sie bei $x = 0$ besitzt, bildet also den Ausdruck

$$\frac{\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)^2\right)^{-1/8} K_{1/4}\left[2\pi p^2 \sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\right]}{K_{1/4}(2\pi p^2)}$$

so lassen sich nach C a m p b e l l und F o s t e r folgende Funktionsverläufe graphisch angeben:




Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{|f|\pi}}$, die auch selbstreziprok ist, fällt nahezu mit der Kurve für $p = 1/2$ zusammen.

Diese Darstellung zeigt, daß die Gauß-Funktion (Kurve $p = \infty$) einige Eigenschaften besitzt, die sie gegenüber den anderen besonders auszeichnen:

1. Die Halbwertsbreite ist am größten
2. Sie geht für große $\pm f$ sehr schnell gegen Null; damit benötigt eine solche Zeitfunktion eine geringe Bandbreite, wenn man hierunter beispielsweise den Frequenzabstand versteht, der jeweils zu 1/10 des Gipfelwertes gehört.

Daß große Halbwertsbreite hier zu schnellem Abfall bei grösserem Frequenzabstand gehört, ergibt sich anschaulich daraus, daß alle Funktionen, die in der letzten Abbildung dargestellt sind, mit der x-Achse die gleiche Fläche einschliessen.

Andere selbstreziproke Funktionen sind:

(761) $\cos[\pi(f^2-\frac{1}{8})]$

(916.3) $\dfrac{|f|\, J_{-3/4}(2\pi r(f^2-r^2)^{\frac{1}{2}})}{(f^2-r^2)^{3/8}}$

(923.85) $f^{\frac{1}{2}} J_{-1/4}(\pi f^2)$

(966.25) $|f|^{2\alpha-3/2} \cdot e^{1/2(\pi f^2)} \cdot W_{3/4-3\alpha,\, 1/4-\alpha}(\pi f^2)$

hier ist $W_{\mu,\nu}(z) = \dfrac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1/2-\mu-\nu)} M_{\mu,\nu}(z) + \dfrac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(1/2-\mu+\nu)} M_{\mu,-\nu}(z)$

wobei $M_{\mu,\nu}(z) = z^{1/2+\nu} \cdot e^{-\frac{1}{2}z} \cdot {}_1F_1(\frac{1}{2}+\nu-\mu;\, 2\nu+1;\, z)$

$${}_1F_1(\mu,\nu,z) = 1 + \frac{\mu}{1!\,\nu} z + \frac{\mu(\mu+1)}{2!\,\nu(\nu+1)} z^2 + \dots$$

Für bestimmte Werte von α geht die Funktion (966.25) über in:

α = 1/8: $\dfrac{1}{|f|^{1/2}}$

α = 1/4: $e^{1/2(\pi f^2)} K_0(\frac{1}{2}\pi |f|^2)$

α = 3/8: $e^{\pi f^2} \Gamma(1/4, \pi |f|^2)$

α = 1/2: $|f|\, e^{\pi f^2} \operatorname{erfc}(\pi^{1/2}|f|) - \frac{1}{\pi}$

mit $\operatorname{erfc}(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_z^\infty e^{-z^2} dz$

Weitere selbstreziproke Funktionen (3) ergeben sich als Lösungen der Differentialgleichung:

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0;\ \lambda = 2n + 1,\ n = 0, 1, \dots$$

wenn man den Ansatz macht $y = e^{-x^2/2} \cdot Y$

wobei $Y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Dann ergeben sich folgende in den Tafeln von C a m p b e l l und F o s t e r angegebenen Funktionen:

(706) $(x^2 - 3)^2 \exp(-\frac{1}{4}x^2)$

$(x^4 - 14x^2 + 21)^2 \exp(-\frac{1}{4}x^2)$ $\qquad x = (4\pi)^{1/2} f$

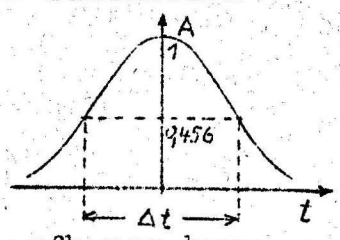
$(x^6 - 33x^4 + 231x^2 - 231)^2 \exp(-\frac{1}{4}x^2)$

$(x^8 - 60x^6 + 1110x^4 - 5340x^2 + 5265)^2 \exp(-\frac{1}{4}x^2)$

$(x^8 - 60x^6 + 990x^4 - 4620x^2 + 3465)^2 \exp(-\frac{1}{4}x^2)$

Bemerkungen zur Gauß-Funktion

Wie die angeführten selbstreziproken Funktionen zeigen, spielt die Gauß-Funktion hier eine besondere Rolle. Entweder tritt sie als Faktor auf oder einige der genannten Funktionen gehen im Grenzfall in sie über. Da eine Gauß-Funktion auch technisch verhältnismäßig leicht herstellbar ist, bietet sie sich von vornherein mit ihren bereits vorher genannten Eigenschaften an, um bestimmte Probleme zu untersuchen (z.B. in der Akustik die impulsartige Erregung bestimmter Bereiche auf der Basilarmembran).




Schreibt man die Gauß-Funktion in der Form

$$\mathcal{F}(t) = A e^{-\pi (t/\Delta t)^2},$$

dann ist $\Delta t$ die Zeit, über die man ein Rechteck aufbauen kann, das flächengleich ist mit der Fläche der Glockenkurve. Dies folgt aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\pi (t/\Delta t)^2} dt = A \sqrt{\frac{\pi}{\pi/\Delta t^2}} = A \cdot \Delta t$$

Für $t = \Delta t/2$ wird

$$\mathcal{F}(t = \Delta t/2) = A e^{-\pi/4} = \underline{0{,}456 A}.$$

Zur Bestimmung des Leistungsdichtespektrums eines Gaußimpulses bildet man die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion (4). Für einen Vorgang mit endlichem Energieinhalt lautet die Autokorrelationsfunktion:

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{F}(t-\tau)\, dt$$

also $$\psi(\tau) = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t/\Delta t)^2} \cdot e^{-\frac{\pi}{(\Delta t)^2}(t-\tau)^2}\, dt$$

$$= A^2 e^{-\pi \frac{\tau^2}{2(\Delta t)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{(\Delta t)^2}\left(\sqrt{2}\,t - \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

$$= A^2 e^{-\pi \frac{\tau^2}{2(\Delta t)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi(\Delta t)^2}{\pi}}$$

$$= A^2 e^{-\pi \frac{\tau^2}{2(\Delta t)^2}} \frac{\Delta t}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\psi(\tau) = E \cdot e^{-\pi(\tau/\Delta\tau)^2}} \; ; \qquad \Delta\tau = \sqrt{2}\,\Delta t$$

hierbei ist $\frac{A^2 \Delta t}{\sqrt{2}} = E$, d.h. der Energieinhalt des Impulses.

Die Fouriertransformation liefert:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(\tau/\Delta\tau)^2 - j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi[(\tau/\Delta\tau)^2 + 2jf\tau + (f\Delta\tau)^2 - (f\Delta\tau)^2]}\, d\tau$$

$$= E\, e^{-\pi(f\Delta\tau)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(\tau/\Delta\tau + j\Delta\tau f)^2}\, d\tau$$

$$= E\, e^{-\pi(\Delta\tau \cdot f)^2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi/(\Delta\tau)^2}} = E \cdot \Delta\tau \cdot e^{-\pi(\Delta\tau \cdot f)^2}$$

mit $\Delta\tau = \frac{1}{\Delta f}$ wird

$$\underline{S(f) = \frac{E}{\Delta f} e^{-\pi(f/\Delta f)^2}}$$

Bei der Integration über den gesamten Frequenzbereich muß natürlich die Gesamtenergie E herauskommen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, df = \frac{E}{\Delta f} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(f/\Delta f)^2}\, df$$

$$= \frac{E}{\Delta f} \sqrt{\frac{\pi(\Delta f)^2}{\pi}} = E$$

## Literaturangaben


1 G.A. CAMPBELL and R.M. FOSTER "Fourierintegrals for practical applications"

2 W.I. SMIRNOW "Lehrgang der höheren Mathematik III/2"

3 N. WIENER "The Fourierintegral and certain of its applications"

4 F.H. LANGE "Korrelationselektronik"